



دخترچه سوالات به همراه پاسفنامه تشریحی مرحله دوم

اولین دوره‌ی المپیاد نجوم و افتراضی یک سال ۱۳۸۳

| تعداد سوالات تشریحی | مدت آزمون (دقیقه) |
|------------------------|----------------------|
| ۸ | ۲۴۰ |

استفاده از ماشین حساب غیر قابل برنامه‌ریزی مجاز است.

توضیحات مهم

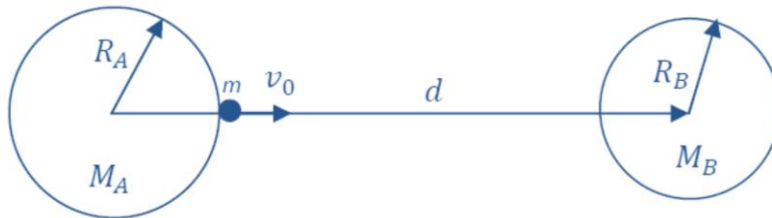
تذکرات پیش از آزمون:

- ضمن آرزوی موفقیت برای شما داوطلب گرامی، خواهشمند است به نکات زیر دقیقاً توجه فرمایید:
- تعداد سوالات این آزمون ۸ سؤال و وقت آن ۴ ساعت است.
 - بر روی هر برگه پیش نویس که به شما داده می‌شود نام و نام خانوادگی خود را حتماً بنویسید.
 - در زیر خط چین بالای پاسخننامه غیر از جواب سوالات هیچ علامت یا عبارت مشخصه‌ای ننویسید.
 - معرفی نامه و کارنامه‌ی خود را در دسترس نگه دارید تا مسئول مربوط بتواند آن‌ها را ملاحظه و جمع‌آوری نماید.
 - استفاده از ماشین حساب مهندسی که قابل برنامه‌ریزی نباشد، مجاز است.
 - استفاده از جدول‌های نجومی، اطلس‌ها و آلماناک‌ها به هر شکل که باشند، مجاز نیست.
 - هنگام آزمون همراه داشتن تلفن همراه (خاموش یا روشن) تخلف محسوب می‌شود. لذا آن را قبل از شروع آزمون به مسئول حوزه تحویل دهید.
 - نتایج این آزمون در اواخر خرداد ماه اعلام خواهد شد.
 - پاسخننامه‌ی تشریحی این آزمون توسط آقای کامبیز خالقی تهیه شده است.

ثوابت فیزیکی و نجومی

| | | |
|---|------------------|--------------|
| $6 / 67 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ | ثابت جهانی گرانش | G |
| $3 \times 10^8 ms^{-1}$ | سرعت نور | c |
| $3 / 09 \times 10^{16} m$ | پارسک | pc |
| $1 / 50 \times 10^{11} m$ | واحد نجومی | Au |
| $9 / 46 \times 10^{15} m$ | سال نوری | Ly |
| $6 / 96 \times 10^8 m$ | شعاع خورشید | R_{\odot} |
| $6 / 38 \times 10^6 m$ | شعاع زمین | R_{\oplus} |
| $1 / 74 \times 10^6 m$ | شعاع ماه | |
| $3 / 84 \times 10^8 m$ | شعاع مداری ماه | |
| $5 / 97 \times 10^{24} kg$ | جرم زمین | M_{\oplus} |
| $5777 K$ | دمای خورشید | T_{\odot} |
| $3 / 85 \times 10^{26} W$ | درخشندگی خورشید | L_{\odot} |
| $1 / 37 \times 10^3 Wm^{-2}$ | ثابت خورشیدی | |
| $-26 / 8$ | قدر ظاهری خورشید | m_{\odot} |
| $70 km s^{-1} Mpc^{-1}$ | ثابت هابل | H |

- ۱- دو کره تو پر به جرم‌های M_A, M_B را در نظر بگیرید، که مراکز آنها در فاصله‌ی ثابت d از یکدیگر قرار گرفته‌اند. شعاع دو کره به ترتیب R_A, R_B است و داریم: $d = 8R_B$ ، $M_A = 8M_B$.



ذره‌ای به جرم m را از سطح کره‌ی A و در جهت خط‌المركزین دو کره با سرعت اولیه V_0 پرتاب می‌کنیم. حداقل V_0 چقدر باشد تا جرم m به کره‌ی B برسد؟

۲- می‌دانیم که حدود ۶۰ درصد از ستارگان آسمان، ستاره‌هایی هستند که در منظومه‌هایی دوتایی یا چندتایی به دور گرانی‌گاه مشترکشان می‌چرخند. اگر صفحه‌ی دوران ستاره تقریباً بر صفحه آسمان عمود باشد، دو ستاره از دید ناظر زمینی از مقابل هم می‌گذرند و چیزی شبیه خورشیدگرفتگی رخ می‌دهد. به این ستارگان، ستاره‌های دوتایی گرفتگی می‌گویند. ستاره‌های دوتایی گرفتگی ستاره‌هایی هستند با نورانیت متغیر؛ که تغییرات نور آنها از روی زمین قابل اندازه‌گیری است، هر چند که در اکثر موارد دو ستاره از دید تلسکوپ قابل تفکیک نیستند. معروف‌ترین ستاره‌ی متغیر گرفتگی که از قدیم مورد توجه اخترشناسان بوده است، ستاره‌ی راس‌الغول در صورت‌فلکی برساووش است که تغییرات نور آن به راحتی با چشم غیرمسلح نیز قابل مشاهده است. اخترشناسان به کمک بررسی نور ستاره‌های دوتایی به خصوصیات فیزیکی ستارگان پی می‌برند و صحت نظریه‌های اخترفیزیکی را تحقیق می‌کنند.

فرض کنید همه ستاره‌های دوتایی در آسمان از دو ستاره به جرم‌های $M_1 = M_2 = M_\odot$ و شعاع‌های $R_1 = R_2 = R_\odot$ تشکیل شده باشند و فاصله متوسط آنها در حدود ۰/۱ واحد نجومی است. با این حساب چند درصد ستارگان دوتایی باید متغیر گرفتگی باشند؟

۳- بازه زمانی بین غروب خورشید و زمانی که زاویه‌ی سمت‌الراس آن به ۱۰۸ می‌رسد، اصطلاحاً شفق خوانده می‌شود. با توجه به این حساب کنید که در عرض جغرافیایی $6^\circ N$ در چه روزهایی از سال آسمان هرگز به طور کامل تاریک نمی‌شود.

۴- اگر زاویه تمایل محور زمین $23^\circ 27'$ باشد، در تاریخ ۱۶ اردیبهشت سال ۱۳۸۴، در شهری با طول جغرافیایی $48^\circ 3'$ و عرض جغرافیایی $34^\circ 48'$ ، سمت خورشید (A_\odot) در هنگام طلوع و مدت زمان ΔT که خورشید بالای افق خواهد بود را حساب کنید. (در این سوال زوایا باید بر حسب دقیقه قوسی محاسبه شود).

۵- فرض کنید خورشید وارد یک سحابی کروی با توزیع چگالی همگن ρ_0 شود، اگر در فاصله R_0 از مرکز سحابی سرعت خورشید v_s و جهت آن عمود بر شعاع سحابی باشد، با فرض اینکه نیروی مقاومت گاز تشکیل دهنده سحابی در حرکت خورشید تأثیر نداشته باشد (حرکت ابقایی است)، دوره تناوب مدار خورشید به دور مرکز سحابی (P) را بدست آورده و نیم قطر بزرگ (a) و خروج از مرکز مدار (e) را حساب کنید. دقت کنید در این سیستم مرکز بیضی مدار بر مرکز سحابی منطبق است و قوانین بقا حرکت زاویه‌ای و انرژی برقرار هستند، به طوری که داریم:

$$L = M_{\odot} R v_{\odot} \quad , \quad \frac{1}{2} M (v_r^2 + v_{\theta}^2) + V(R) = E$$

که در آن‌ها، R فاصله از مرکز سحابی، $V(R)$ انرژی پتانسیل گرانشی، E انرژی مکانیکی کل و L اندازه حرکت زاویه‌ای هستند. v_r, v_{θ} به ترتیب مولفه‌های مماسی و شعاعی بردار سرعت خورشید، هنگام حرکت آن به دور مرکز سحابی است.

۶- نیکلای کپرنیک، ستاره‌شناس لهستانی در قرن پانزدهم و شانزدهم میلادی می‌زیست. او به نظریه‌ی خورشید مرکزی معتقد بود، تفاوت بین دوره‌ی نجومی و دوره‌ی هلالی سیارات را دریافت و توانست فاصله‌ی سیارات از خورشید را حساب کند و مدلی بر مبنای مرکزیت خورشید در عالم بنا کرد. در این مسئله شما خود را جای کپرنیک می‌گذارید و به روش او فاصله‌ی سیارات از خورشید را حساب می‌کنید.

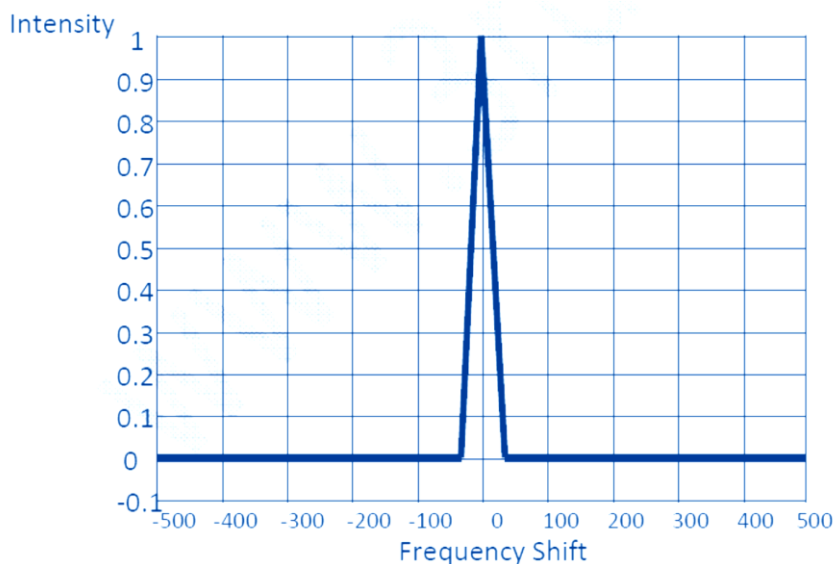
توجه: در این مسئله نباید از قوانین کپلر، مکانیک نیوتنی و جاذبه‌ی عمومی استفاده شود.

فرض کنید شما سیاره‌ای را در آسمان می‌بینید که در اولین شب رشد در حالت مقابله است. ۸۹ روز بعد سیاره در حالت تربیع دیده می‌شود و ۴۸۹ روز بعد، سیاره دوباره به مقابله می‌رسد. منجمان دیگر که معتقد به نظریه‌ی زمین مرکزی بودند می‌گویند که فاصله این سیاره از زمین نباید بیشتر از فاصله زمین از خورشید باشد، زیرا سرعت حرکت خاص آن به دور زمین از خورشید کمتر است. شما برای اثبات نظر خود مبنی بر اینکه خورشید در مرکز عالم است، باید فاصله این سیاره از خورشید و دوره تناوب آن به دور خورشید را حساب کنید. کپرنیک با همین اطلاعات فاصله‌ی سیارات را حساب کرد.

۷- معمولاً ستارگان از طریق باد خورشیدی جرم از دست می‌دهند. همچنین فرآیندهای گداخت هسته‌ای همواره بخشی از جرم ستاره را به انرژی تبدیل می‌کند که از طریق تابش از ستاره خارج می‌شود. در نتیجه، از این طریق نیز ستارگان جرم از دست می‌دهند. به ویژه غول‌های سرخ، آهنگ کاهش جرم بالایی دارند. فرض کنید، یک ستاره‌ی غول سرخ با جرم $M = 5M_{\odot}$ ، دارای سیاره باشد که در مداری با فاصله‌ی $a = 10 AU$ از ستاره، به دور آن می‌گردد. این ستاره با آهنگ $10^{-8} M_{\odot} / \text{year}$ جرم خود را به صورت باد ستاره‌ای از دست می‌دهد. اگر تابندگی ستاره $L = 3 / 83 \times 10^{39} \text{ erg} / \text{s}$ باشد، آهنگ سالانه تغییر اندازه‌ی مدار سیاره $\left(\frac{da}{dt} \right)$ در اثر کاهش جرم چقدر است؟

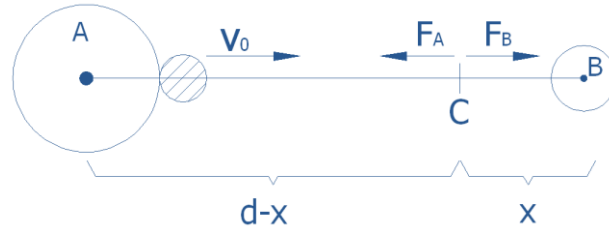
۸- امروزه یکی از روش‌های دقیق بررسی سیارات منظومه شمسی ارسال امواج رادار به سیارات نزدیک، همچون عطارد، و بررسی امواج منعکس شده از این سیاره است. با بررسی طیف منعکس شده می‌توان سرعت حرکت وضعی یا سرعت زاویه‌ای سیاره را بدست آورد. فرض کنید توسط راداری متصل به یک ماهواره در مداری دایره‌ای به دور عطارد، یک موج تک فرکانس با فرکانس ۳۰ گیگاهرتز به سمت عطارد ارسال می‌شود. از مشاهدات زمینی بدست آورده‌ایم که قطر این سیاره $d_m \approx 5000 \text{ km}$ و زاویه تمایل محور آن تقریباً صفر است. پس از منعکس شدن امواج رادیویی از سطح سیاره به خاطر پدیده‌ی دوپلر، موج بازگشتی دیگر تک فرکانس نخواهد بود. در نمودار زیر طیف (منحنی شدت بر حسب تغییرات فرکانسی) موج ارسال شده را روی شکل زیر رسم کنید. توجه:

در شکل زیر محور افقی، اختلاف فرکانس موج ارسالی و موج دریافتی را نشان می‌دهد. عدد صفر نشان‌دهنده فرکانس موج ارسال شده یا همان ۳۰ گیگاهرتز است. شدت امواج ارسال شده را 1 Wm^{-2} در نظر بگیرید. از جذب امواج راداری در بین را صرف نظر کنید. ماهواره در صفحه‌ی استوای عطارد حرکت می‌کند و به اندازه‌ی کافی از عطارد دور است.



۱- برای آنکه جرم m به کره B برسد باید از نقطه تعادل گرانشی A و B عبور کند. بنابراین حداقل سرعت، وقتی خواهد بود که جسم m در نقطه‌ی تعادل نیروهای گرانشی به سرعت صفر یا بیشتر از صفر برسد. نیروی گرانش قوی‌تر B ، این جسم را جذب می‌کند.

داریم:



در نقطه تعادل گرانشی: $F_A = F_B$

$$\frac{Gm_A m}{(d-x)^2} = \frac{Gm_B m}{x^2} \Rightarrow \frac{x}{d-x} = \sqrt{\frac{m_B}{m_A}}$$

فاصله نقطه تعادل از مرکز B :

$$\Rightarrow \frac{x}{d-x} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{d}{2\sqrt{2} + 1}$$

نیروهایی که در حین حرکت جسم m روی آن تأثیر می‌گذارند، نیروهای گرانشی هستند. بنابراین می‌توان از قانون بقای انرژی مکانیکی در حالت پرتاب از سطح A و حالت نقطه تعادل گرانشی C ، استفاده کرد، پس داریم:

$$E_A = E_C$$

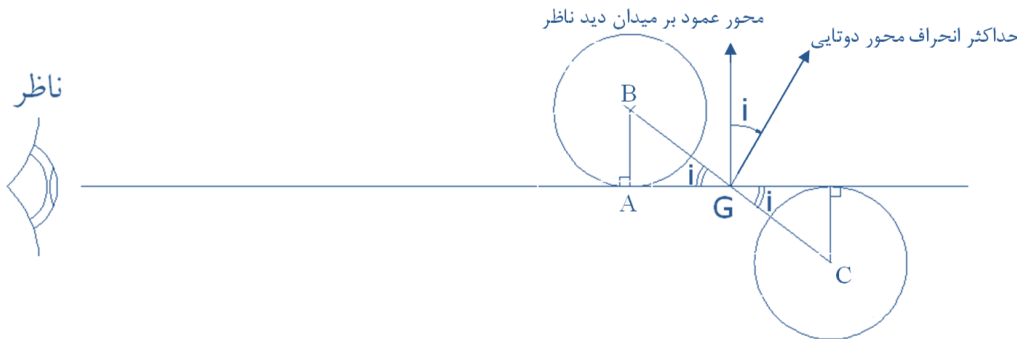
$$\Rightarrow U_A + K_A + U_B = U_c + K_c$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{-Gm_A m}{R_A} + \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{Gm_B m}{d-R_A} &= \frac{-Gm_A m}{d-x} + \frac{1}{2} m v_c^2 - \frac{Gm_B m}{x} \\ v_c \approx 0, m_A = 8m_B, d = 8R_B \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$v_0 \approx \sqrt{2GM_B \left[\frac{8}{R_A} + \frac{1}{8R_B - R_A} - \frac{8}{5/9R_B} - \frac{1}{2/9R_B} \right]}$$

$$\Rightarrow v_0 \approx \sqrt{2GM_B \left(\frac{8}{R_A} + \frac{1}{8R_B - R_A} - \frac{0/875}{R_B} \right)}$$

۲- طبق فرض سوال، پراکندگی ستارگان دوتایی یکنواخت است، پس تنها کفایست دوتایی‌هایی را بیابیم که زاویه انحراف مداری آن‌ها به گونه‌ای است که از دید ناظر زمینی از جلوی یکدیگر عبور می‌کنند.



این انحراف که در شکل با i نشان داده شده است با دو زاویه نظیر و متقابل به رأس گرانیگاه، برابر است.

از طرفی طبق فرض سوال مدارها دایره‌ای هستند پس GB با GC برابر است.

$$BC = 0.18u + 2R_{Sun} \Rightarrow GB = 0.054u + R_{Sun} = 0.05 + 0.00464 = 0.05464u$$

حال در مثلث قائم‌الزاویه GAB چنین می‌نویسیم:

$$\sin i = \frac{AB}{GB} = \frac{0.00464}{0.05464} \Rightarrow i = 4.87$$

پس زاویه‌های تمایل مداری صفر تا $i = 4.87$ ، ستارگان دوتایی به شکل متغیر گرتی دیده می‌شوند. حال داریم:

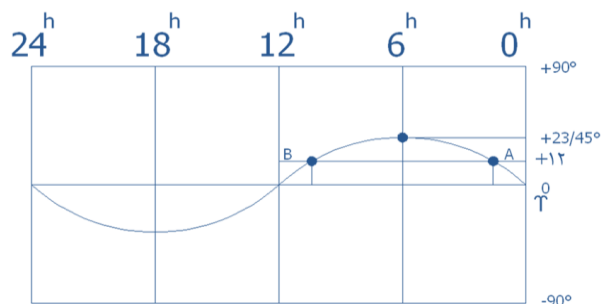
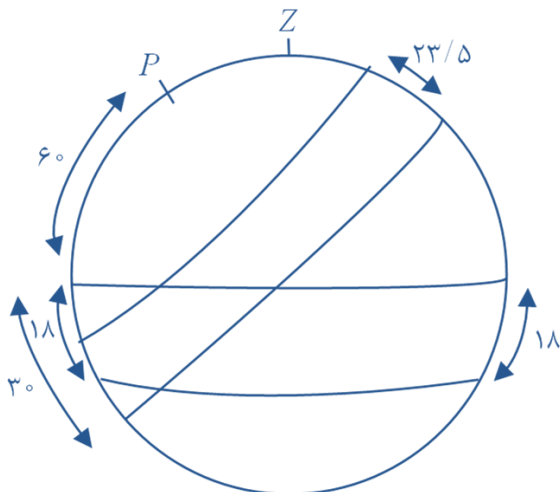
$$\frac{\text{متغیرهای گرتی}}{\text{ستارگان دوتایی}} = \frac{4.87^\circ - 0^\circ}{9^\circ - 0^\circ} = \frac{4.87}{9} = 54.1\%$$

۴۱ / ۵٪ ستارگان دوتایی گرتی هستند.

۳- اگر قرار باشد آسمان کاملاً تاریک شود، فاصله‌ی سمت الرأسی خورشید نباید بیشتر از 10.8° شود. یعنی ارتفاع خورشید در هنگام عبور پایینی نباید کمتر از 18° شود.

در عرض جغرافیایی 60° شمالی، نمودار آسمان بدین شکل است:

از این نمودار در می‌یابیم که در مدت زمان روشن بون آسمان، میل خورشید باید بین $12 = 30 - 18$ و $23/5$ شمالی تغییر کند. از طرفی می‌دانیم که نمودار تغییرات بعد و میل خورشید به قرار ذیل است:



پس ابتدا طول دایره البروجی خورشید در میل ۱۲ درجه را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{\sin \delta_{\odot}}{\sin \varepsilon} = \frac{\sin \lambda_{\odot}}{\sin \frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \sin \delta_{\odot} = \sin \lambda_{\odot} \sin \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lambda_{\odot} = 31 / 4^{\circ}$$

حال با استفاده از توصیف خورشید میانگین دایره البروجی، تاریخ که طول دایره البروجی خورشید ۳۱/۴ درجه است را بدست می‌آوریم:

$$365 \text{ day} \quad 360 \text{ deg}$$

$$x \text{ day} \quad 31 / 4 \text{ deg}$$

از اینجا x برابر ۳۲ روز بدست می‌آید. پس نخستین روزی از سال که آسمان کاملاً تاریک نمی‌شود روز ۳۳ سال، برابر ۲ اردیبهشت است. اما خورشید تا تاریخ ۱ تیر همچنان به افزایش میل ادامه می‌دهد و قرینه‌ی همین تعداد روز (۲ اردیبهشت تا ۱ تیر و ۱ تیر تا ۳۰ مرداد) صبر می‌کند تا مجدداً آسمان تاریک شود.

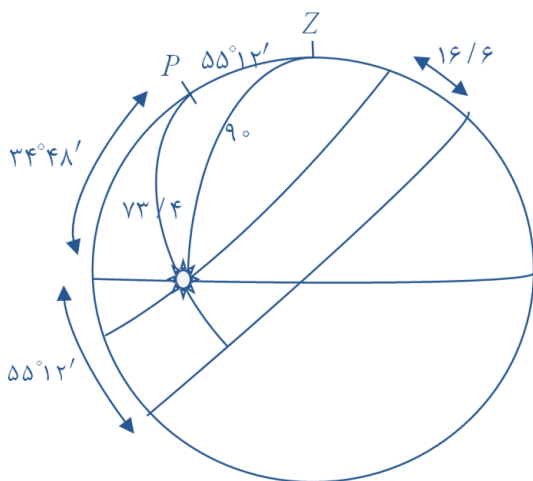
برای این کار، ابتدا باید طول دایره البروجی خورشید را در این تاریخ محاسبه کنیم:

$$365 \text{ day} \quad 360 \text{ deg}$$

$$47 \text{ day} \quad \lambda \text{ deg}$$

از این جا طول دایره البروجی خورشید ۴۶ درجه بدست می‌آید. حال به سراغ استخراج میل خورشید می‌رویم:

$$\frac{\sin \delta_{\odot}}{\sin \varepsilon} = \frac{\sin \lambda_{\odot}}{\sin \frac{\pi}{2}} \Rightarrow \sin \delta_{\odot} = \sin \lambda_{\odot} \sin \varepsilon \Rightarrow \delta_{\odot} = 16 / 6^{\circ}$$



از این پس می‌توانیم با خورشید به عنوان یک ستاره‌ی معمولی برخورد کنیم؛

با نوشتن قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث PZS و برای ضلع PS داریم:

$$\cos 73 / 4 = \cos 90 \cos 55 + \sin 90 \sin 55 \cos A \Rightarrow$$

$$A = 69 / 6$$

که سمت طلوع و غروب خورشید را بدست می‌دهد. برای محاسبه‌ی مدت

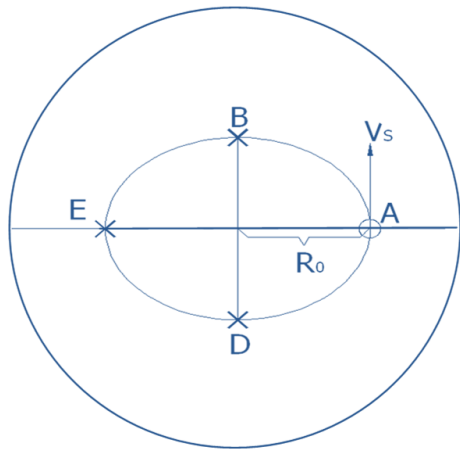
زمان حضور خورشید در آسمان، باید دو برابر زاویه ساعتی خورشید

هنگام طلوع را نیز بدست آوریم:

$$\cos 90 = \cos 73 / 54 \cos 55 + \sin 73 / 54 \sin 55 \cos H \Rightarrow$$

$$H = 101^{\circ} \Rightarrow \Delta T = 2H = 202^{\circ} \Rightarrow \Delta T = 13h \ 30m \ 40s$$

۵- مرکز بیضی منطبق بر مرکز مدار است. پس شکل کلی حرکت به ترتیب نشان داده شده در شکل زیر است. از آنجا که بردار سرعت بر شعاع سحابی عمود است، پس خورشید روی یکی از دو قطر کوچک یا بزرگ قرار دارد، یعنی یکی از چهار نقطه A, B, C, D یا E نقاط B و D نسبت به کانون وضعیت متقارنی دارند.



از طرف دیگر فرض کرده‌ایم مدار پایدار است؛ پس انرژی مدار برابر است با انرژی مکانیکی خورشید، و داریم:

جرمی که بر خورشید اثر می‌کند، طبق قانون گوس، برابر جرم متمرکز در کره‌ای به مرکز سحابی و شعاع R_0 است؛ پس داریم:

$$E_{\odot} = K + U$$

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{1}{2} m_{\odot} V_s^2 \\ U &= \frac{-GMm_{\odot}}{R_0} \\ M &= \rho_0 V = \rho_0 \times \frac{4}{3} \pi R_0^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow E = \frac{1}{2} m_{\odot} V_s^2 - \frac{4}{3} \pi \rho_0 G R_0^2 m_{\odot}$$

مدار حرکت خورشید را یک بیضی به نیم قطر بزرگ a و خروج از مرکز e در نظر می‌گیریم، که مرکز سحابی در یکی از کانون‌های آن قرار گرفته است. جرم کانونی را M_G می‌نامیم، حال داریم:

$$E_{\text{مدار}} = -\frac{GM_G m_{\odot}}{2a} = E_{\odot} = m_{\odot} \left(\frac{1}{2} V_s^2 - \frac{4}{3} \rho_0 G R_0^2 \right) \Rightarrow \frac{M_G}{a} = \frac{4}{3} \pi \rho_0 R_0^2 - \frac{V_s^2}{G}$$

طبق تعریف، بردار سرعت بر بردار شعاع عمود است. حال اندازه حرکت زاویه‌ای را بدین ترتیب محاسبه می‌کنیم:

$$L = m_{\odot} R V$$

مسئله را به سه حالت اصلی تفکیک می‌کنیم:

(۱) خورشید در نقطه A باشد.

در این حالت، خورشید روی محور اصلی قطر بزرگ بیضی قرار دارد و مطابق شکل، در اوج مداری است.

$$2a = 2R_0 \Rightarrow a = R_0$$

$$L = m_{\odot} R_0 (1+e) V_s = m_{\odot} R_0 V_s \Rightarrow e = 0 \quad \text{مسیر حرکت یک دایروی است.}$$

از قانون سوم کپلر استفاده کنیم:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_0}{4\pi^2} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{a}{GM}} 2\pi a = \sqrt{\frac{1}{\frac{4}{3}\pi G \rho_0 R_0^2 - V_s^2}} 2\pi R_0$$

(۲) خورشید در نقطه E باشد. این نقطه نیز روی قطر اطول واقع است، اما این بار روی حضیض مداری؛ حال روابط را همانند بخش الف به دست می‌آوریم:

$$2a = 2R_0 \Rightarrow a = R_0 \Rightarrow e = 0 \Rightarrow T = 2\pi R_0 \sqrt{\frac{1}{\frac{4}{3}\pi G \rho_0 R_0^2 - V_s^2}}$$

۳) خورشید روی دو سر قطر کوچک بیضی قرار گرفته باشد.

$$\left. \begin{aligned} b &= R_{\odot} \\ \left(\frac{b}{a}\right)^2 &= 1 - e^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a\sqrt{1 - e^2} = R_{\odot}$$

$$a_p = a(1 - e) = p$$

فرض می‌کنیم پس از مدتی، خورشید به حوض مدار جدید رسیده باشد. پس می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{-GM_G m_{\odot}}{2a} = m_{\odot} \left(\frac{1}{2} V_s^2 - \frac{4}{3} \pi \rho_{\odot} G R_{\odot}^2 \right) = K_p + U_p \\ K_p &= \frac{1}{2} m_{\odot} V_p^2 \\ V_p &= \frac{L}{m_{\odot} a_p} = \frac{L}{m_{\odot} p} = \frac{R_{\odot} V_s}{p} \\ U_p &= \frac{-GM' m_{\odot}}{p} \\ M' &= \rho_{\odot} \times \frac{4}{3} \pi p^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow U = -G \rho_{\odot} \frac{4}{3} \pi p^2 m_{\odot}$$

$$E = \frac{1}{2} m_{\odot} \frac{R_{\odot}^2 V_s^2}{p^2} - \frac{4}{3} \pi \rho_{\odot} m_{\odot} p^2 \Rightarrow \frac{4}{3} \pi \rho_{\odot} p^4 + \frac{E}{m_{\odot}} p^2 - \frac{R_{\odot}^2 V_s^2}{2} = 0$$

ریشه‌ی معادله‌های فوق را بدست می‌آوریم:

$$\Rightarrow p = \sqrt{\frac{-\frac{E}{m_{\odot}} + \sqrt{\left(\frac{E}{m_{\odot}}\right)^2 + \frac{4\pi \rho_{\odot} R_{\odot}^2 V_s^2}{3}}}{\frac{4}{3} \pi \rho_{\odot}}} = a(1 - e)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{a(1-e)} = \frac{R_{\odot}}{p} \Rightarrow \frac{1-e}{1+e} = \frac{\frac{4}{3} \pi \rho_{\odot} R_{\odot}^2}{\sqrt{\left(\frac{E}{m_{\odot}}\right)^2 + \frac{4\pi \rho_{\odot} R_{\odot}^2 V_s^2}} - \frac{E}{m_{\odot}}}$$

$$e = \frac{\sqrt{\frac{\lambda}{3} \pi \rho_o R_o^2 V_s^2 + \left(\frac{E}{m_\odot}\right)^2} - \frac{\lambda}{3} \pi \rho_o R_o - \frac{E}{m_\odot}}{\sqrt{\frac{\lambda}{3} \pi \rho_o R_o^2 V_s^2 + \left(\frac{E}{m_\odot}\right)^2} + \frac{\lambda}{3} \pi \rho_o R_o - \frac{E}{m_\odot}}$$

$$a = \frac{R_o}{\sqrt{1-e^2}}, \quad T = 2\pi a \sqrt{\frac{a}{GM}} = \frac{2\pi R_o}{\sqrt{1-e^2}} \sqrt{\frac{1}{\frac{\lambda}{3} \pi G \rho_o R_o^2 - V_s^2}}$$

فرض ما بر این بوده است که خورشید در مرکز منظومه باشد و زمین و سیاره در فاصله‌های d_1 و d_2 در مدارهای دایروی به دور خورشید بگردند. از طرف دیگر می‌دانیم که زمین در یک سال، یک دور کامل به دور خورشید می‌گردد. در حالت اول سیارات A و B در حالت مقابله قرار دارند. ۸۹ روز بعد، دو سیاره که در یک جهت به دور خورشید می‌گردند، در حالتی قرار می‌گیرند که از دید ناظر روی A' ، سیاره B' در حالت تربیع دیده می‌شود. می‌بینیم که در این مدت، سیاره A به اندازه $\theta_A = \alpha + \beta$ دوران کرده است. سیاره B به اندازه $\theta_B = \beta$ به دور خورشید چرخیده است. در مسیر دایره‌ای سیاره در یک تناوب نجومی یک دور کامل یا 360° به دور خود می‌گردد. حال با یک نسبت ساده؛ می‌توان زاویه‌ی حرکت را تعیین کرد.

| | | | |
|--|-------------------------|--|-------------------------|
| $\frac{89 \text{ day}}{T \text{ day}}$ | $\frac{\theta_A}{2\pi}$ | $\frac{89 \text{ day}}{T \text{ day}}$ | $\frac{\theta_B}{2\pi}$ |
|--|-------------------------|--|-------------------------|

$$\Rightarrow \theta_A = \frac{2\theta}{T_\oplus} 89 \quad \Rightarrow \alpha = \theta_A - \theta_B = (2\pi)(89) \left(\frac{1}{T_\oplus} - \frac{1}{T_p} \right)$$

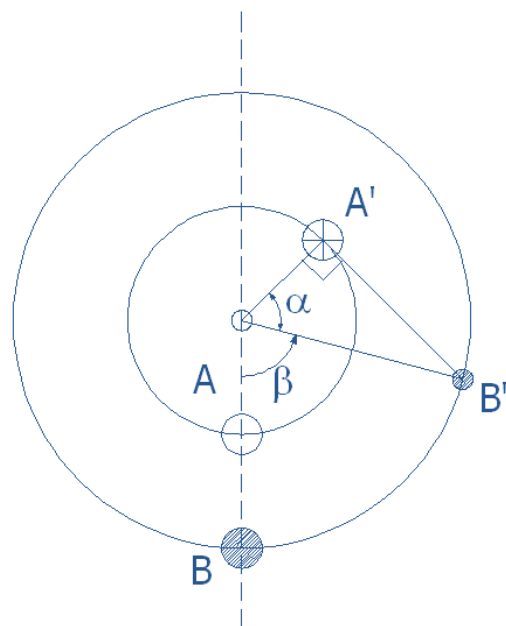
$$\Rightarrow \theta_B = \frac{2\pi}{T_p} 89$$

با توجه به فرض مسئله، ۸۹ روز بعد سیاره دوباره به مقابله می‌رسد. پس در این مدت، زمین یک دور جلو افتاده است. داریم:

$$2\pi = \theta_A - \theta_B = 2\pi (89) \left(\frac{1}{T_\oplus} - \frac{1}{T_p} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{365/25} - \frac{1}{T_p} = \frac{1}{489}$$

$$\Rightarrow T_p = 1443 / 3 \text{ روز} \text{ دوره تناوب نجومی سیاره:}$$



$$\alpha_{rad} = 2\pi (89) \left(\frac{1}{365/25} - \frac{1}{1443/3} \right) \Rightarrow \alpha = 1/14 rad$$

دوباره به حالت تربیع باز می‌گردیم:

$$\cos \alpha = \frac{d_1}{d_2} \Rightarrow d_2 = \frac{d_1}{\cos \alpha} \Rightarrow d_2 = 2/41 d_1$$

با توجه به شکل و در مثلث $SA'B'$ داریم:

فاصله این سیاره از خورشید، $2/41$ برابر فاصله زمین از خورشید است.

ابتدا آهنگ کاهش جرم سالیانه این غول سرخ را در اثر تابش انرژی به دست می‌آوریم:

$$\left. \begin{aligned} L &= 3/83 \times 10^9 \text{ erg/s} \\ 1J &= 10^7 \text{ erg} \end{aligned} \right\} \Rightarrow L = 3/83 \times 10^{22} \text{ J/s}$$

مقدار انرژی با توجه به رابطه نسبیتی $E = mc^2$ چنین به دست می‌آید:

$$L = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta m c^2}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{3/83 \times 10^{22} \text{ J/s}}{(3 \times 10^8 \text{ m/s})^2} = 4/255 \times 10^{15} \text{ kg/s} = 4/255 \times 10^{15} \frac{3/15 \times 10^6}{1/99 \times 10^3} \frac{M_{\odot}}{\text{year}}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta m_L}{\Delta t} = 6/747 \times 10^{-8} \frac{M_{\odot}}{\text{year}}$$

کاهش جرم در اثر تابش

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\Delta m_L + \Delta m_w}{\Delta t} = -7/747 \times 10^{-8} \frac{M_{\odot}}{\text{year}}$$

بنابراین کل کاهش جرم غول سرخ چنین بدست می‌آید:

اگر مدار سیاره دایروی باشد می‌توانیم با توجه به قانون عمومی گرانش، چنین بنویسیم:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{a}} \quad \text{و} \quad \frac{L}{m} = \sqrt{GMa} \Rightarrow \left(\frac{L}{m} \right)^2 = GMa$$


که در این رابطه m جرم سیاره است. از آنجایی که هیچ نیرویی به سیاره وارد نمی‌شود، اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای ثابت می‌ماند. جرم سیاره

نیز ثابت است، پس برای بدست آوردن نرخ تغییرات، از دو طرف این رابطه بر حسب زمان مشتق می‌گیریم:

$$\frac{G(M\Delta a + a\Delta M)}{\Delta t} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta M/\Delta t}{M} = -\frac{\Delta a/\Delta t}{a} \Rightarrow \Delta a/\Delta t = -\frac{\Delta M/\Delta t}{M} a = -\frac{-7/747 \times 10^{-8} \frac{M_{\odot}}{\text{year}}}{5M_{\odot}} 10 \text{ Au}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\Delta a}{\Delta t} \approx 1/55 \times 10^{-7} \text{ Au/year}$$

۸- سرعت دوران وضعی عطارد: 

$$v = R_{Mercury} \frac{2\pi}{T} = \frac{5}{2} \times 10^6 m \frac{2\pi}{59 \times 24 \times 3600 s} = 3 / 08 m/s$$

برای ناظر ساکن ماهواره، سرعت شعاعی عامل ایجاد اثر دوپلر است. پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{v}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \\ \lambda = \frac{c}{\nu} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{\frac{c}{\nu} - \frac{c}{\nu_0}}{\frac{c}{\nu_0}} = \frac{\nu_0}{\nu} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{\nu_0}{\nu} = \frac{v}{c} + 1$$

رابطه دوپلر بر اساس بسامد، این چنین است:

حداکثر جابه‌جایی بسامد، این چنین بدست می‌آید:

$$\frac{v}{c} = \frac{3 / 08 m/s}{3 \times 10^8 m/s} = 1 / 027 \times 10^{-8}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\nu_0}{\nu} - 1 = 1 / 027 \times 10^{-8} \\ \nu_0 = 30 GHz = 3 \times 10^{10} Hz \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta\nu = \nu - \nu_0 = \pm 308 / 1 Hz \approx \pm 310 Hz$$

طیف بازتابیده شده از سطح سیاره، مانند طیف ارسال شده خطی نیست چرا که میزان جابه‌جایی در سطوح بازتابنده‌ی مختلف، متفاوت است.

